1065. Bicompact ナ群ノ群環ニツイテ (Segal ノ定理ノ証明)

深宮　政範 (阪大)

I. E. Segal ガ Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. 27 (1941) 上デ locally bicompact group デ, abelian 又ハ bicompact ナ group ノ group ring ヲ maximal 両側 ideal ヲ用ヒテウマク論ジテキル。

abelian ノ場合ハ Gelfand-Raikov ノ結果ニ含マレルガ, bicompact ノ場合ハ大変面白イト考ヘラレ, 又 compact ノ場合ニモ, 亦モット一般ノ場合ニモ應用デキソウニ思ハレルガ証明ガナク, 又精シイコトモ分ラナイ。主ナ定理ノ証明ガ得ラレタヤウニ思フノデ, 以下ニ述ベテ, 御教示ヲ頂キタイト思ヒマス。

G ヲ topological bicompact ナル group トシ, G ノ上ノ完全加法不変測度ヲ μ トスル. 測度 μ ニ関スル Lebesgue integrable ナル函数全体ヲ $L_1 = L_1(G)$ デ表ハス。

L_1 ハ積及ビノルムガ夫々

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t$$

$$\|f\| = \int_G |f(s)|\, ds$$

ト考ヘレバノルムノ定義サレタ(non-commutative)環デアル。茲ニ"ノルム"ハ

$$\|\alpha f\| = |\alpha|\cdot\|f\|,\ \|f+g\| \leqq \|f\|+\|g\|,\ \|f\|=0 \rightleftarrows f=0$$

ヲ満足セシナル。

L_1 = unit ヲ附加シタ ring ヲ R:

$$z \in R \rightleftarrows z = \alpha 1 + f,\ f \in L_1$$

$$\|z\| = |\alpha| + \|f\|$$

$$z \circ z' = \alpha\alpha' 1\ \ \alpha f' + \alpha' f + f \circ f'$$

トスル。良ク知ラレタ如クRハ"ノルム"ノ意味デcomplete ナ ring デ、ring トシテノ unit ヲ含ム。

以下 R ヲ bicompact group G ノ group ring ト呼ブコトトスル。

R ハ bicompact group ノ上ノ almost periodic functions 全体ノ ring ヲ sub-ring トシテ含ンデ居ル(而モノルムノ意味デ dense sub-ring トシテ)[1].

<u>Ideals in R</u>. R ノ部分集合 I ガ i) 代数的ニRノ両側 ideal デ ii) ノルム"‖ ‖"ノ意味デ closed ナルトキ R ノ両側 ideal ト云フ。両側 ideal I ガ ≠(0), R ナルトキ proper ト云ヒ, $I \subset J$ ナル

(1) 例ヘバ Bochner, Annals, 40 (1939), pp 773—775,
ナホ Bochner ガソコデ論ジテキルコトハ A. Markoff, Recueil math., 46 (1938) デモット詳シク既ニ論ジテアルコトデハナカラウカト思ハレル.

proper 両側 ideal ガナイトキ maximal 両側 ideal ト云フ。

R ノ凡エル max. 両側 ideal ノ共通部分ガ $Z=0$ ニ限ルトキ R ヲ semi-simple ト云フコトニスレバ Segal ノ主ナ定理ハ

(A) R ノ maximal 両側 ideal M ニヨル residue class ring R/M ハ有限次元

(B) R ハ Semi-simple $\alpha h(s)+\int h(st^{-1})g(t)dt$ ノ二ツニナル。

<u>(A) ノ証明</u>　L_1 ハ R ノ max. 両側-ideal デ, $R/L_1=$ complex numbers ハ明カ。

M ヲ max. 両側-ideal デ, $\neq L_1$ トスル。

$R/M=\{E, X, Y, \cdots\cdots\}$, $\|X\|=\inf\limits_{z\in X}\|Z\|$

トスレバ R/M ハ complete.

$M\neq L_1$ カラ $f\in L_1$, $\bar{\in} M$ ナル f ガ存在スル。今 $f\in X$ トスル max. ナルコトカラ R/M ハ simple (proper ナ両側 ideal ヲ有シナイ). 依ツテ

$$E=\sum_{i=1}^{n} Y_i \underline{X} Z_i$$

ガ成立ツ. $R/M=R_1$ ノ operator トシテ $Y_i\underline{X}Z_i$ ガ凡テ vollstetig ナコトヲ云ヘバ, E (unit) ガ vollstetig, 従ツテ R_1 ノ単位球ガ vollstetig トナルカラ Riesz ノ定理デ R_1 ハ有限次元ニナル。

サテ $\underline{X}$ ハ $f\in L_1$ ヲ含ム class デアルカラ $Y_i\underline{X}Z_i$

ニ含マレル R ノ元素ハ悉ク $\in L_1$, R カラ $R/M = R_1$ ヘノ寫像ハ連續ダカラ $Y_i \overline{X} Z_i$ ガ R_1 ノ vollstetig ナ operator デアルコトヲ云フタメニハ, 結局 $h(s) \in L_1$ ニヨル integral operator

$$\int_G h(st^{-1})\, g(t)\, dt, \qquad g(t) \in L_1$$

ガ L_1 ノ norm デ vollstetig デアルコトヲ云ヘバ十分デアル。

此ノ最後ノコトハ compact ナ函數集合ニ對スル Kolmogoroff-Riesz ノ定理カラ云ヘル。(1)

(B) ノ証明　R ノ凡テノ max. 両側 ideal ノ集合ヲ $\mathfrak{M}$ トスル.

今 $z \in R$, $z \in \prod_{A \in \mathfrak{M}} A$ トスル. $A = L_1 \in \mathfrak{M}$ デアルカラ

$$z = f(s) \in L_1.$$

証明スベキコトハ $f(s) \neq 0$ ナラバ $f(s) \bar{\in} A$ ナル $A \in \mathfrak{M}$ ガ存在スルコト.

integral equation ハ

$$f \circ g = \int_G f(st^{-1})\, g(t)\, d\mu_t = \lambda g(s) \qquad (*)$$

---

(1) M. Riesz, Acta Szeged, 6.
之ハ三村征雄氏ノ御教示ニヨル, ナホ吉田耕作氏モ連續函數デ近似スレバ vollstetig ガ証明デキルコトヲ注意サレタ. 両氏ニ厚ク感謝シタイ.

ハ，アル$\lambda_0 \neq 0$ニ對シテ解ヲモツ。λ_0ニ對スル linearly independent ナ固有函數ヲ

$$g_1(s),\ g_2(s),\ \cdots\cdots,\ g_n(s)$$

トスル（以上 $f(st^{-1})$ ノ vollstetig ナルコトカラ），茲デ $g_i(s)$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ハ有界 continuous トシテヨイ。

良ク知ラレタ考ヘニヨッテ $g(t)$ ガ $\lambda=\lambda_0$ ニ對スル（＊）ノ固有函數デアレバ，凡テノ $a\in G$ ニ對シテ $g(ta)$ モ亦固有函數デアル，從ッテ

$$g_i(ta)=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(a)\, g_j(t),$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n \qquad (**)$$

$Z=\alpha 1+h(s)\in R$ ニ對シテ n 次ノ matrix

$$D_n(Z)=\alpha E_n+\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\, h(a)\, d\mu_a$$

ヲ對應サセレバ，$D_n(Z)=0$ ナル Z ノ全体ハ R デ両側 ideal ヲ作ル。之ヲ A_1 トスレバ $A_1 \ni f(s)$ ナルコトガ云ヘサヘスレバ $f(s)$ ヲ含マナイ max. 両側 ideal ガアルコトガ分ル。

$$D_n(f)=\int_G \{u_{ij}(a^{-1})\}_{i,j}\, f(a)\, d\mu_a \neq 0$$

ナルコトノ証明ハ次ノ様ニスレバヨイ様デアル。

（＊），（＊＊）カラ

$$\lambda g_i(s)=\int_G f(st^{-1})g(t)\,d\mu_t=\int_G f(t)\,g(t^{-1}s)\,d\mu_t$$

$$=\int_G f(t)\left(\sum_{j=1}^{n}u_{ij}(s)\,g_i(t^{-1})\right)d\mu_t$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,u_{ij}(s)$$

然ルニ

$$\beta_i=\int_G f(t)\,g_i(t^{-1})\,dt=\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j}{\lambda}\int_G u_{ij}(t^{-1})f(t)\,d\mu_t$$

茲ニモシ悉ク $\int_G u_{ij}(t^{-1})f(t)\,d\mu_t=0$ ナラバ $\beta_i=0$, $i=1,2,\ldots\ldots,n$

従ッテ　$g_i(s)\equiv 0,\ i=1,2,\ldots\ldots,n$

然ルニ $f(s)\neq 0$ ナラバ必ズ $\lambda_0\neq 0$ ナル固有値ガアルノダカラ $f\bar{\in} A$ ナル max. ideal ノ存在ガ証明サレルコトニナル。

（西大 第二三六八号）